Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi

Davide La Manna

12 aprile 2018

Esercizio 1. *(coppia di Kuratowski) Definiamo* $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
allora $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \vee b = b'$

Dimostrazione. Usiamo l'estensionalità: $\forall A\ \forall B,\ A = B \Leftrightarrow (\forall x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ (AE)
$(\Rightarrow)$
Supponiamo che (a,b) costa di un solo elemento, per $2{\cdot}$(AE) $\Rightarrow\ a = b$ allora essendo $(a, b) = (a'b')$ sempre per (AE) $a = b' = a = b$.
Adesso supponiamo $a \neq b$ (Ogni implicazione vale per (AE)). $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ $\Rightarrow a' \neq b' \Rightarrow \{a\} = \{a'\} \Rightarrow \{a, b\} = \{a', b'\}$
$(\Leftarrow)$
Essendo $a = a' \vee b = b'$ per (AE) $\{a\}$=$\{a'\}$ $\vee$ $\{a, b\}$=$\{a'.b'\}$, Per definizione e per (AE) tesi.

$\square$

Esercizio 2. *(Assioma di scelta) Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *Sia* $< A_i \,|\, i \in I >$ *sequenza di insiemi non vuoti, allora* $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

2. *Sia* $\mathcal{F}$ *famiglia non vuota di insiemi non vuoti, allora esiste una* f *con le seguenti proprietà:*

   - $dom(f) = \mathcal{F}$
   - $\forall A {\in} F\ f(A) \in A$.

   Tale f *verrà chiamata "funzione di scelta".*

3. *Sia* $\mathcal{F}$ *una famiglia non vuota di insiemi non vuoti e a due a due disgiunti, allora esiste un insieme* X *tale che* $\forall A \in \mathcal{F}\ \exists!\ a \in A {\cap} X$. *Tale* X *verrà chiamato "insieme di scelta".*

4. $\forall f :\ A \to B$ *surgettiva* $\exists g :\ B \to A$ *t.c* $f \circ g(B) = B$.

5. *Sia data la sequenza di insiemi* $< F_{ij} \mid i \in I \vee j \in J >$ *vale:*

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} F_{ij} = \bigcup_{f:I\to J}\bigcap_{i\in I} F_{if(i)}$$

Dimostrazione.
$1 \iff 2$
Sia $\mathcal{F} = \{A_i \,|\, i \in I\}$, allora ogni $f \in \prod_{i\in I} A_i$ soddisfa le condizioni della proposizione 2 , è quindi una funzione di scelta per $\mathcal{F}$. Viceversa, sia f una funzione di scelta per $\mathcal{F} = \{A_i \,|\, i \in I\}$, allora $\prod_{i\in I} A_i$ è non vuoto, infatti la I-upla $< f(A_i) \,|\, i \in I >$ è un suo elemento
$2 \Rightarrow 3$
Possiamo costruire X come le immagini di f rispetto gli A_i. Sappiamo che l'intersezione è formata da un solo elemento perchè gli insiemi sono disgiunti, se non lo fossero la f potrebbe identificare due elementi appartenenti ad un intersezione, in tal caso non ci sarebbe un unico elemento.
$3 \Rightarrow 4$
consideriamo la famiglia d'insiemi $\mathcal{F} := \{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$. Tale famiglia è non vuota (perchè B non può essere vuoto) e formata da insiemi non vuoti (in virtù della surgettività di f), per cui basta attribuire a $g(b)$ l'unico elemento presente nell'intersezione dell'insieme di scelta dato dalla (3) e $f^{-1}(\{b\})$. La composizione con g fornisce l'identità per costruzione.
$4 \Rightarrow 1$
$\forall a_i \in A_i$ con $i \in I$ definiamo $f : \bigcup_{i\in I}(A_i \times i) \quad \to \mathcal{F} \mid f(a_i, i) = A_i$, ovviamente tale funzione è surgettiva, e per 4 ammette inversa destra. Sia g tale inversa, allora $g(A_i) = (a_j, j)$ ma $f(g(A_i)) = A_j$ ed essendo la funzione identità obbliga $j = i$. per cui $< b_i \mid i \in I > \in \prod_{i\in I} A_i$
$1 \Rightarrow 5$
Sia A e B rispettivamente il lato sinistro e il lato destro della tesi della prop (5) Dalla caratterizzazione di unione e intersezione arbitraria segue che dato $x \in B$ allora $\exists f : I \to J \; \forall i \in I \mid x \in F_{i,f(i)}$ allora dato $j = f(i)$, $x \in F_{i,j}$ quindi $B \subseteq A$. Sia adesso $x \in A$ allora $\forall i \in I \; \exists j \in J| \; x \in F_{i,j}$. Consideriamo la I-sequenza generata dalla caratterizzazione di unione e intersezione arbitraria $< j_i \mid i \in I >$ Essa è formata da insiemi non vuoti per definizione quindi per (1) $\exists f : I \to J$ per cui $\forall i \in I,\; x \in F_{i,f(i)}$ quindi $A \subseteq B$.
$5 \Rightarrow 1$
Sia data $< A_i \,|\, i \in I >$.Sia $J := \bigcup_{i\in I} A_i$ Costruiamo $F_{i,j} := i \; se \; j \in A_i$,$\{0\}$ altrimenti. Essendo gli A_i non vuoti, $\forall i \in I \; \exists A_i \mid i \in F_{i,A_i} \Rightarrow per(5) \; \exists f : I \to A_i \; \forall i \in I| \; i \in F_{i,f(i)}$ quindi f $\in \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ perchè dall'appartenenza di i in F_{i,A_i} scopriamo che f fà corrispondere ad A_i un elemento che $\in A_i$.

□

Esercizio 3. *Siano A, A' , B, B' insiemi tali che* $|A| = |A'|, |B| = |B'|$. *Allora valgono*

1. *Se* $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ *allora* $|A \cup B| = |A' \cup B'|$

2. $|A \times B| = |A' \times B'|$

3. $|B^A| = |B'^{A'}|$

4. $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$

Dimostrazione. siano $a : A \to A'$ e $b : B \to B'$ bigezioni

1. costruisco $f : A \cup B \to A' \cup B'$ nel seguente modo: $f(x) = a(x)$ se $x \in A$ e $f(x) = b(x)$ se $x \in B$, osservo che è una buona definizione in virtù del fatto che i due insiemi sono disgiunti. f è iniettiva, infatti sia $f(x) = f(y)$ per simmetria del problema dichiamo $f(x) \in A'$ Allora l'iniettività segue dall'iniettività di a. f è surgettiva, infatti sia $x \in A' \cup B'$ come prima per la simmetria del problema possiamo supporre $x \in A'$ allora la surgettività segue dalla surgettività di a.

2. Costruisco $f : A \times B \to A' \times B'$ nel seguente modo: $f(x, y) = (a(x), b(y))$. f è iniettiva: sia $f(x, y) = f(x', y')$ allora, per definizione di coppia ordinata, $a(x) = a(x')$ e $b(x) = b(x')$ l'iniettività segue quindi dall'iniettività di a e b. f è surgettiva: sia $(x', y') \in A' \times B'$ dalla surgettività di a e b segue che $\exists x \in A | a(x) = x' \vee \exists y \in B | b(y) = y'$, quindi, la surgettività segue semplicemente dalla definizione f che la coppia (x', y') è immagine di (x, y)

3. definisco $F : A^B \to A'^{B'}$ nel seguente modo: sia $f : A \to B \implies F(f) = b \circ f \circ a^{-1}$ (a è bigettiva) è la bigezione cercata: è iniettiva: infatti dalla relazione $F(g) = F(f)$ mi riduco a $g = f$ essendo a e b bigettive (quindi possono essere "semplificate) Per la surgettività notiamo che per ottenere $f' : A' \to B'$ basta percorrere il grafico al contrario: quindi sà che $\forall f' \exists f'' | f'' = b^{-1} \circ f' \circ a$

4. La bigezione è banalmente $F : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{A}')$ Che associa ad un sottoinsieme di A la sua immagine rispetto ad $a(x)$. La sua inversa è semplicemente $F^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{A}') \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ che ad un sottoinsieme di A' associa la Controimmagine rispetto ad $a(x)$ di quel dato insieme. Infatti è ovvio che sia inversa destra-sinistra essendo I sottoinsiemi di A' in corrispondenza biunivoca con quelli di A rispetto ad $a(x)$.

$\square$

Esercizio 4. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con $dim_{\mathbb{R}}(V) = \aleph$. Quanto vale $|V|$?*

Dimostrazione. Due spazi vettoriale aventi la base della stessa cardinalità sono isomorfi. quindi possiamo limitarci a studiare lo spazio dei polinomi a una variabile a coefficienti reali, infatti un isomorfismo è in particolare una bigezione tra insiemi.
Notiamo innanzi tutto Che $|V| \geq c$, semplicemente perchè i polinomi di grado 0 sono isomorfi ad $\mathbb{R}$. D'altro canto, i polinomi sono particolari funzioni continue da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quindi l'isomorfismo d'inclusione fornisce la seconda disuguaglianza cercata.

$\square$

Esercizio 5. *Calcolare la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone*

Dimostrazione. Banalmente notiamo che ogni funzione monotona ha cardinalità >c, infatti ogni reale può essere visto come una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ costante (quindi debolmente crescente), inoltre possiamo limitarci a studiare le funzioni crescenti: data una funzione f decrescente $-f$ è una funzione crescente, quindi il totale delle funzioni monotone sarà il doppio di quelle crescenti, chiamiamo C tale insieme. Considero $F : C \to ((\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}) \times \{0,1\})^{\mathbb{Q}}$ tale che $F(f) = g_f$ e $g_f(q) = (a, b)$ dove

$$a = inf\{x \in \mathbb{R} | f(x) \geq q\}$$

$$b = \begin{cases} 0 & a \notin \mathbb{R} \ \vee \ f(a) < q \\ 1 & a \in \mathbb{R} \ \wedge \ f(a) \geq q \end{cases}$$

Vogliamo che F sia iniettiva. Sia $F(f) = F(g)$ supponiamo che $\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)$ per simmetria del problema possiamo supporre $f(x) < g(x)$ per cui per densità $\exists q \in \mathbb{Q}\ t.c\ f(x) < q < g(x)$. Inoltre $g_f(q) = g_g(q) = (y, c)$. Dalla debole crescenza di f segue $x \geq y$ e da quella di g $y \geq x$ da cui $x = y$, adesso volgendo lo sguardo a c troviamo un assurdo, infatti: sia $c = 1 \Rightarrow f(x) \geq q$, sia $c = 0 \Rightarrow g(x) < q$. Di conseguenza $|C| \leq |\mathbb{R} \times 2|^{\mathbb{R}} = c^{\aleph} = c$. Per quanto osservato all'inizio possiamo concludere che la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone è c.

□

Esercizio 6. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ numerabile, allora $\mathbb{R} \setminus A$ è denso in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che ogni punto di A è d'accumulazione per $\mathbb{R} \setminus A$, ragioniamo per assurdo: $\exists x \in A\ \exists \epsilon > 0 | (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathbb{R} = \emptyset$, tuttavia, si dimostra che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$ e il chè porta ad un assurdo nell'aver supposto che A avesse parte interna in quanto allora per l'inclusione si avrebbe che $|A| \geq c$. □

Esercizio 7. $\forall A\ \forall B\ \exists\ fun(A, B)$

Dimostrazione. Usiamo il fatto che, per l'assioma delle parti $\exists \mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ da cui segue che $Fun(A, B) = \Bigg\{ \mathbf{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \mid ((a \in A \Rightarrow (\exists b \in B \mid (a, b) \in \mathbf{R})) \wedge ((a, b) \in \mathbf{R} \wedge (a, b') \in \mathbf{R} \Rightarrow b = b' \Bigg\}$ □

Esercizio 8. *Sia ω l'insieme dei numeri naturali di Von Neumann, dimostrare le seguenti proprietà*

1. *Se $x, y \in \omega$, allora $x \in y \Rightarrow \hat{x} \in \hat{y}$*

2. *Se $x \in y \in \omega$, allora $x \in \omega$*

Dimostrazione. Dimostriamo le 2 tesi per induzione y

1. Il passo base vero a vuoto infatti se $y = 0 \not\exists\, x \in y$. Supponiamo che $x \in y \Rightarrow \hat{x} \in \hat{y}$ e dimostriamo che $x \in \hat{y} \Rightarrow \hat{x} \in \hat{}$ y. Se $x \in \hat{y}$, ci sono due possibilità:

- $x = y$ ma allora $\hat{x} = \hat{y} \in \hat{\hat{y}}$
- $x \in y$ quindi per ipotesi induttiva $\hat{x} = \hat{y} \in \hat{\hat{y}}$

Quindi la tesi è dimostrata.

2. anche in questo caso il passo base è vero a vuoto essendo $x = \emptyset$
supponiamo che $x \in y \in \omega \Rightarrow x \in \omega$ e proviamo a dimostrare ceh se $x \in \hat{y} \in \omega \Rightarrow x \in \omega$
anche in questo caso abbiamo 2 casi

   - $x = y$ ma per ipotesi $y \in \omega$ quindi anche $\in \omega$
   - $x \in y$ quindi per ipotesi induttiva $x \in \omega$

   Per il principio d'induzione il teorema è valido per ogni naturale.

$\square$

Esercizio 9. *. Dimostrare che la somma in ω è ben posta, $\forall n \in \omega$, $n+1 = \hat{n}$ e che $\nexists m \in \omega \mid n < m < n+1$*

Dimostrazione. Si nota che la somma su ω è ben posta. La somma su ω $(x+y)$ è definita come $|A \cup B|$ dove $|A| = x \vee |B| = y$, (Dove A e B hanno intersezione vuota), infatti preso $|A| = |A'|$ e $|B| = |B'|$ abbiamo dimostrato che $|A \cup B| = |A' \cup B'|$
Fatta questa doverosa premessa, si nota che $|n+1| = |\hat{n}|$ Inoltre, se $m < n+1 \Rightarrow m = n \vee m \in n$ (ovvero $m < n$) da cui segue la tesi. $\square$

Esercizio 10. $(\omega, \in)$ *è ben ordinato.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non lo sia: allora esiste una catena discendente infinita di elementi di ω del tipo:
$a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni ...$ Osserviamo che, per la proprietà transitiva, ogni elemento $a_i \neq i$ della catena dovrà essere un elemento di a_1. Poichè a_1 ha soltanto un numero finito di elementi, tale catena non pu'o essere infinita, assurdo. $\square$

Esercizio 11. *Se A è infinito, allora è equipotente ad una sua parte propria.*

Dimostrazione. Sia A insieme infinito. diamo per buono che $|A| \geq |\omega|$, dunque esiste una funzione $f : \omega \to A$ iniettiva. Sia $A' = Imm(f) = f(\omega) \subseteq A$. Poichè A' è numerabile, sappiamo ad esempio che $|A'| = |A' - \{f(0)\}|$, ossia esiste una funzione $f' : A' \to A' - \{f(0)\}$ bigettiva. Dunque la funzione $g : A' \cup (A')^c \to (A' - \{f(0)\}) \cup (A')^c$ tale che

$$g(a) = \begin{cases} f'(a) & a \in A' \\ a & a \notin A' \end{cases}$$

è evidentemente bigettiva, ma $(A' - \{f(0)\}) \cup (A')^c = A - \{f(0)\}$ è una parte propria di A' $\square$

Esercizio 12. *Dato un insieme A, mostrare che*

$$\bigcup_{n\in\omega} Fun(n, A)$$

è un insieme

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $f : n \to A \subseteq n \times A \subseteq \omega \times A$
da cui la catena d'inclusioni: $Fun(n, A) \subseteq \mathcal{P}(n \times A) \subseteq \mathcal{P}(\omega \times A)$

Dato $\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega \times A)) \mid \exists n \in \omega, x = Fun(n, a)\}$ (prendendo le parti trasformo il contenimento in appartenenza)
quindi, in virtù dell'assioma dell'unione e delle parti: $\bigcup_{n\in\omega} Fun(n, A) = \bigcup \mathcal{F}$ è un insieme $\square$